大学数学のアトリエ｜線形代数　第 3 章　行列式

No.1　行列式の定義

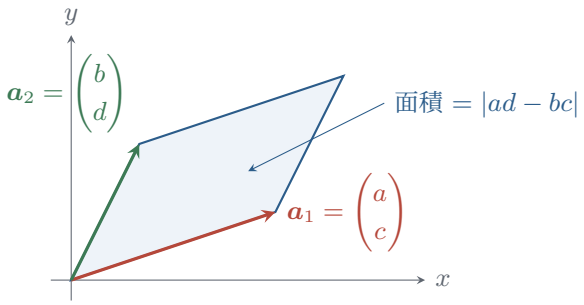
この回のゴール

- 2 次の行列式 $ad-bc$ が「面積」を表すことを説明できる．
- 置換と，その符号 $\operatorname{sgn}\sigma$ を転倒数から求められる．
- n 次の行列式の定義を読み，2 次・3 次の公式（サラスの方法）がそこから出てくることを確かめられる．
- 三角行列の行列式が対角成分の積であることを示せる．

■ 1. 2 次の行列式と面積

第 1 章 No.3 で，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則になる条件は $ad-bc\neq 0$ だった．この $ad-bc$ を A の**行列式**といい，$\det A$ や $|A|$ と書く．

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc.$$



A の 2 本の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ が作る平行四辺形の面積は $|ad-bc|$ である（高校で学んだ公式 $\frac{1}{2}|ad-bc|$ は三角形の面積）．

符号まで含めると，$\boldsymbol{a}_1$ から $\boldsymbol{a}_2$ へ**反時計回り**に回るとき $ad-bc>0$，時計回りのとき $ad-bc<0$ になる．行列式は「**向きつきの面積**」である．

コラム：なぜ $ad-bc=0$ だと正則でないのか

$ad-bc=0$ は，平行四辺形がつぶれて面積 0，つまり $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ が同じ直線上に並んでいることを意味する．行列 A を「平面上の点を動かす変換」と見ると，平面全体が 1 本の直線に押しつぶされてしまい，元に戻せない．これが「逆行列がない」ことの図形的な意味である．3 次の行列式は，同じように 3 本の列ベクトルが作る平行六面体の（向きつきの）**体積**を表す．

n 次の行列式を定義するために，まず「置換」を準備する．

■ 2. 置換とその符号

定義 1　置換

$\{1, 2, \ldots, n\}$ から自分自身への全単射（1 から n を**並べ替える**操作）を n 次の**置換**という．置換 σ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

のように，上の段の数が下の段の数に移ることで表す．n 次の置換全体の集合を S_n と書く．S_n の要素の個数は $n!$ である．

例 1

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ は $\sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 3,\ \sigma(3) = 1$ を表す．何も動かさない置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ を**恒等置換**といい，ε と書く．2 つの数だけを入れ替え，他は動かさない置換を**互換**という．

置換の「符号」は，並べ替えの結果がどれくらい「乱れているか」の偶奇で決める．

定義 2　転倒数と符号

置換 σ の下の段 $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ を見て，$i < j$ なのに $\sigma(i) > \sigma(j)$ となっている組 (i, j)（大小が逆転している組）の個数を σ の**転倒数**といい，$N(\sigma)$ と書く．

$$\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{N(\sigma)}$$

を σ の**符号**という．$\operatorname{sgn}\sigma = 1$ の置換を**偶置換**，$\operatorname{sgn}\sigma = -1$ の置換を**奇置換**という．

例 2　S_3 の置換と符号

下の段だけを書く．

下の段	123	132	213	231	312	321
転倒数	0	1	1	2	2	3
符号	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$	-1

たとえば 231 では，逆転している組は「2 と 1」「3 と 1」の 2 つなので転倒数は 2.

符号について，次の事実を使う（証明は教科書に任せる）．

定理 1　符号の性質

(1) 置換 σ の下の段で，2 つの数を入れ替えると，符号は逆になる．

(2) どんな置換もいくつかの互換の積で表せる．k 個の互換の積で表せるなら $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^k$.

(3) $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\tau,\quad \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}\sigma.$

注意

(1) の感覚：隣どうしを入れ替えると，その 2 つの大小関係だけが変わるので転倒数はちょうど 1 増えるか減る．離れた 2 つの入れ替えは，隣どうしの入れ替えの奇数回の組合せで実現できる．

■ 3. 行列式の定義

定義 3　行列式

n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ に対し，

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\; a_{1\sigma(1)}\,a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

を A の**行列式**という．$|A|$ とも書く．

定義の読み方

- 1 つの項 $a_{1\sigma(1)}\,a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ は，**各行から 1 つずつ，しかも列が重ならないように**成分を選んで掛けたもの．（チェス盤に，互いに取り合わないように飛車を n 個置くイメージ．）
- そういう選び方が $n!$ 通りあり，それぞれに符号 $\operatorname{sgn}\sigma$ を付けて全部足す．
- 4 次なら 24 項，5 次なら 120 項．定義どおりに計算するのは大変なので，実際の計算は No.2・No.3 の方法を使う．

■2 次の場合　S_2 は $\varepsilon=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$（符号 $+1$）と $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$（符号 -1）の 2 つなので，

$$\det A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

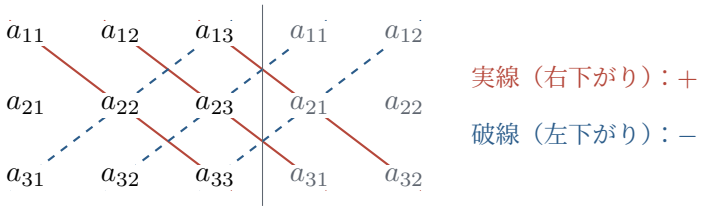
第 1 節の $ad-bc$ と一致する．

■3 次の場合（サラスの方法）　例 2 の表を使うと

$$\det A=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

これを並べ替えると，次の**サラスの方法**になる．

右に第 1 列・第 2 列を書き足して，斜めに 3 つずつ掛ける．



$$\det A=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

注意

サラスの方法は **3 次専用**である．4 次の行列で同じように斜めの線を引いても，24 項のうち 8 項しか出てこないので正しくない．

例題 1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ の行列式を求めよ.

【解答】 サラスの方法で

$$\det A = 1\cdot 5\cdot 10 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8 - 3\cdot 5\cdot 7 - 1\cdot 6\cdot 8 - 2\cdot 4\cdot 10 = 50 + 84 + 96 - 105 - 48 - 80 = -3.$$

■ 4. 三角行列の行列式

対角成分より下（または上）がすべて 0 の正方行列を，**上三角行列**（**下三角行列**）という.

定理 2　三角行列の行列式

上三角行列，下三角行列の行列式は，対角成分の積に等しい.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特に $\det E = 1$.

【証明】上三角行列で示す．項 $a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ が 0 でないためには，各 i で $a_{i\sigma(i)} \neq 0$，つまり $\sigma(i) \geq i$ でなければならない（対角より下は 0）.

$\sigma(n) \geq n$ より $\sigma(n) = n$．すると $\sigma(n-1)$ は n 以外で $n-1$ 以上なので $\sigma(n-1) = n-1$．これを続けると $\sigma(i) = i$（すべての i），つまり $\sigma = \varepsilon$．よって残る項は $\operatorname{sgn}\varepsilon \cdot a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ だけ．下三角行列も同様. □

例 3

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot(-1)\cdot 4 = -24.$$

4 次でも，三角行列なら一瞬で計算できる．次回 No.2 では，行基本変形を使って**どんな行列も三角行列に持ち込んで**行列式を計算する.

■ 練習問題

1. 次の置換の転倒数と符号を求めよ（下の段だけを書いている）.

(1) $2\,4\,1\,3$　　(2) $3\,1\,4\,2$　　(3) $4\,3\,2\,1$　　(4) $5\,4\,3\,2\,1$

2. 次の行列式を求めよ.

$$(1)\ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad (3)\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

3. $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ を満たす x を求めよ.

4. 4 次の行列式の定義に現れる項 $a_{12}\,a_{23}\,a_{34}\,a_{41}$ の符号は $+$ か $-$ か．また，$a_{13}\,a_{21}\,a_{34}\,a_{42}$ の符号はどうか.

5. 定義を使って，ある行の成分がすべて 0 である正方行列の行列式は 0 であることを示せ.

6.（考えてみよう）2 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が作る平行四辺形の面積を，行列式を使って求めよ．また，$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の順番を入れ替えると行列式はどうなるか.

■ 練習問題の解答

1. (1) 逆転している組は $(2,1)$, $(4,1)$, $(4,3)$ の 3 つ．転倒数 3，符号 -1．(2) $(3,1)$, $(3,2)$, $(4,2)$ の 3 つ．転倒数 3，符号 -1．(3) どの 2 つも逆転していて $\binom{4}{2}=6$．符号 $+1$．(4) 同様に $\binom{5}{2}=10$．符号 $+1$.

2. (1) $3\cdot4-(-2)\cdot5=22$. (2) サラスの方法で $2\cdot0\cdot(-1)+(-1)\cdot2\cdot4+3\cdot1\cdot1-3\cdot0\cdot4-2\cdot2\cdot1-(-1)\cdot1\cdot(-1)=0-8+3-0-4-1=-10$．(3) 下三角行列なので $2\cdot(-3)\cdot4=-24$.

3. サラスの方法で $x^3+1+1-x-x-x=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$．よって $x=1,\ -2$.

4. $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ は $\sigma(1)=2,\ \sigma(2)=3,\ \sigma(3)=4,\ \sigma(4)=1$，下の段 2 3 4 1．逆転は $(2,1)$, $(3,1)$, $(4,1)$ の 3 つで，符号は $-$.
$a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$ は下の段 3 1 4 2 で，練習問題 1 (2) より符号は $-$.

5. 第 i 行がすべて 0 とする．定義のどの項 $a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ も第 i 行の成分 $a_{i\sigma(i)}=0$ を 1 つ含むので 0．よって和も 0.

6. $\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=6-1=5$ なので，面積は 5．入れ替えると $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1-6=-5$ で，符号だけが変わる（回る向きが逆になる）．（第 1 節の図はこの 2 本のベクトルで描いてある．）